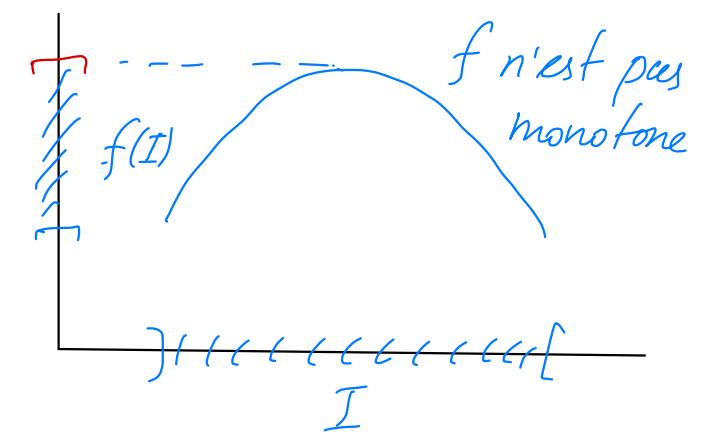
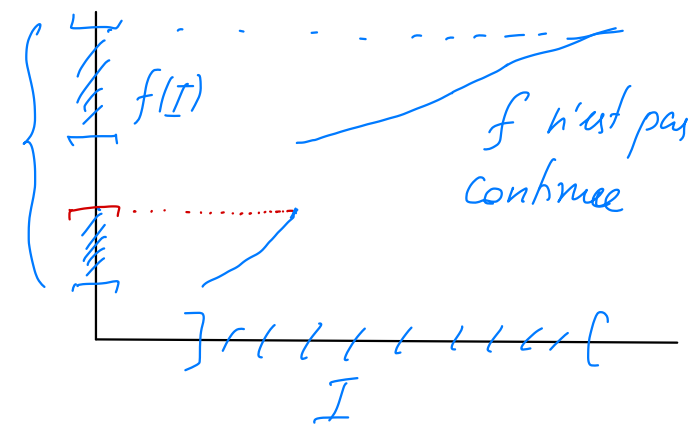
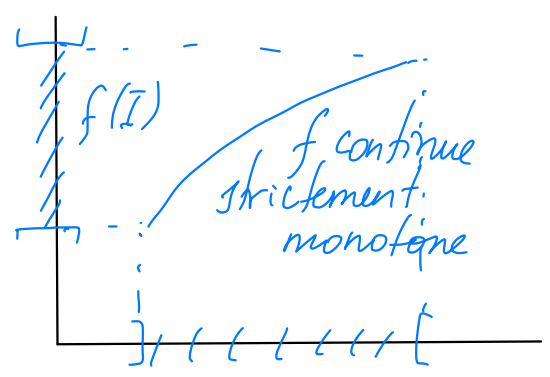


Rappel: Théorème de la valeur intermédiaire: Une fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint son sup, son inf, et toute valeur comprise entre les deux

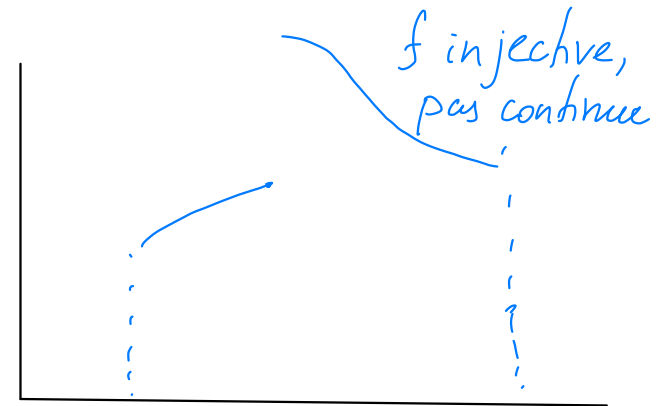
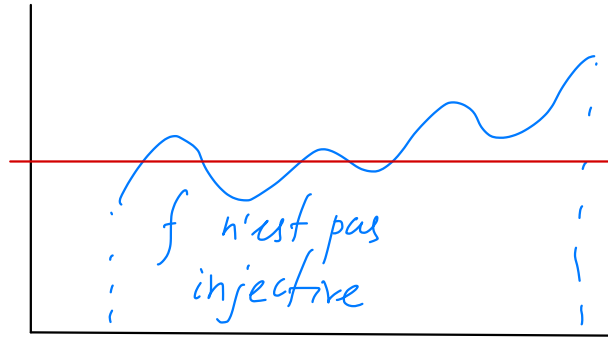
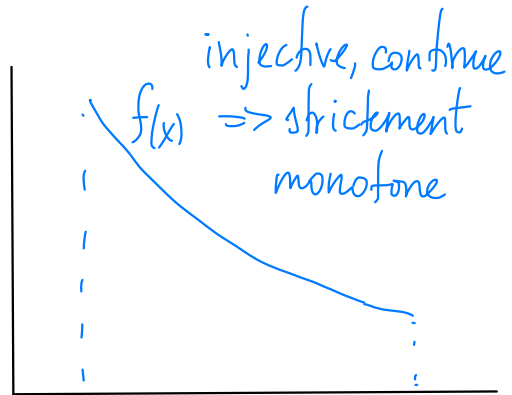
$[f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \Rightarrow \forall c \in [\min_{[a, b]} f(x), \max_{[a, b]} f(x)], \text{ il existe au moins un } x_0 \in [a, b] : f(x_0) = c]$

Corollaire 1. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Alors il existe au moins un $c \in]a, b[: f(c) = 0$.

Corollaire 2. Soit I un intervalle ouvert; $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue strictement monotone. Alors $f(I)$ est un intervalle ouvert.



Corollaire 3. Toute fonction injective et continue sur un intervalle est strictement monotone.



Corollaire 4. Toute fonction bijective continue sur un intervalle admet une fonction réciproque qui est continue et strictement monotone.

Dém: [DZ, §4.3]

Chapitre 5. Calcul différentiel.

§ 5.1. Fonctions dérivables

Def. Une fonction $f: E \rightarrow F$ est dite **dérivable** en $x_0 \in E$ s'il existe la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_0) \in \mathbb{R}$

Cette limite est appelée **la dérivée** de f en x_0 , notée **$f'(x_0)$** .

Ex 1. $f(x) = x^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \stackrel{\rightarrow x_0 + x_0}{=} 2x_0 \Rightarrow$$

$$(x^2)' = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Ex 2. $f(x) = \cos x$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos\left(\frac{x+x_0}{2} + \frac{x-x_0}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+x_0}{2} - \frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-2 \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{-\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}}_{\rightarrow -1} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}_{\rightarrow \sin x_0} = -\sin x_0$$

$\Rightarrow$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$\rightarrow -1$

$$t = \frac{x - x_0}{2}$$

Exercice: $(x^3)' = 3x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad (\sin x)' = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Remarque. Si f est dérivable en $x = x_0$, on peut écrire

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x) \quad \text{où } \underbrace{r(x)}_{\text{notation}} \stackrel{\text{dit}}{=} f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

Alors $r(x)$ est telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} - f'(x_0) \right) = 0.$

$\Rightarrow$ Toute fonction dérivable en $x = x_0$ admet une présentation
 $f(x) = f(x_0) + \underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} \cdot (x - x_0) + r(x) \quad \text{où } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0.$

Dans ce cas on dit que f est différentiable en x_0 .

Réciproquement, si $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)$, t.g. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{a \cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} + \underbrace{\frac{r(x)}{x - x_0}}_{\rightarrow 0} \right) = a \Rightarrow f \text{ est dérivable en } x = x_0, \text{ et } f'(x_0) = a.$$

Alors f est différentiable en $x_0 \Leftrightarrow f$ est différentiable en $x = x_0$, et $f'(x_0) = a$.

Fonction dérivée : Si $f : E \rightarrow F$ est dérivable sur un ensemble $D(f') \subset E$,

alors on définit la fonction dérivée : $f' : D(f') \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x)$$

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
x^2	$2x$
x^n	$n x^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$

Interpretation géométrique de f'

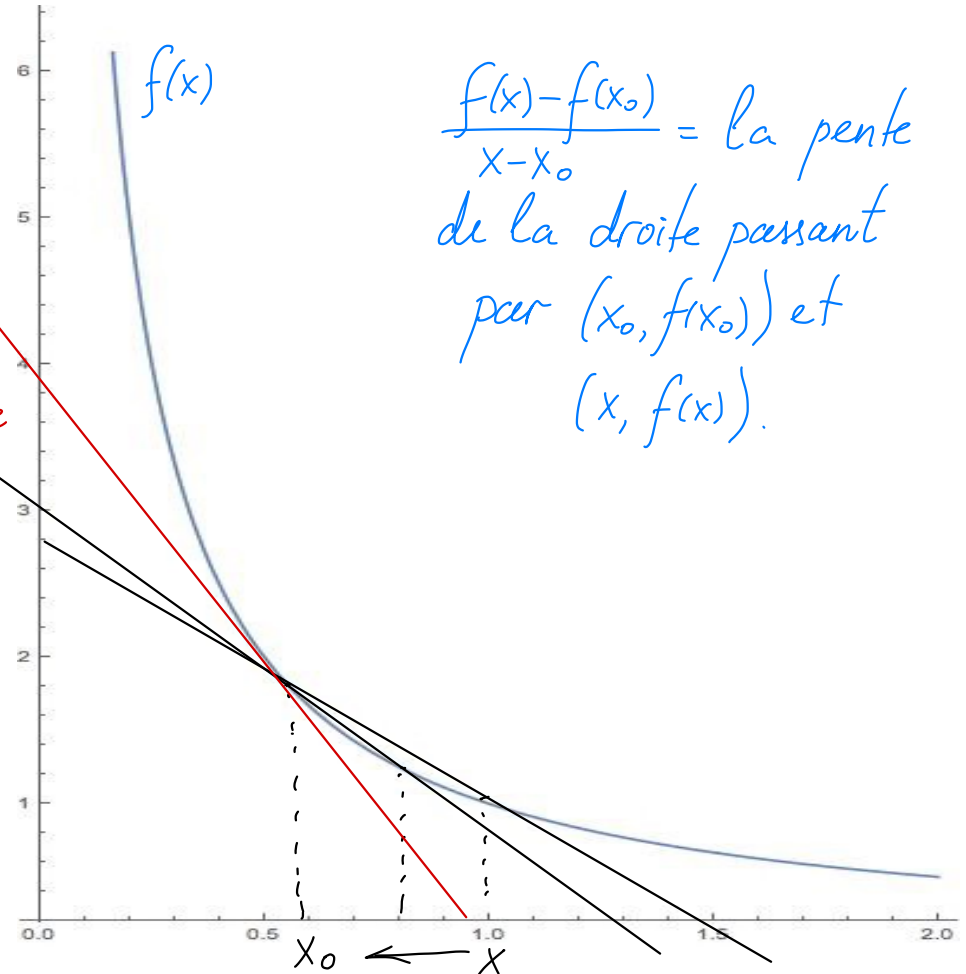
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$.

Equation de la tangente:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

tangente
à la courbe
 $y = f(x)$
en $x = x_0$



Proposition Une fonction dérivable en $x=x_0$ est continue en $x=x_0$

Dém: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\text{f est dérivable en } x=x_0 \\ \rightarrow f'(x_0) \in \mathbb{R}}} \underbrace{(x - x_0)}_0 \right) = f(x_0) \Rightarrow$
 f est continue en $x=x_0$ $\square$

La réciproque est fautive:

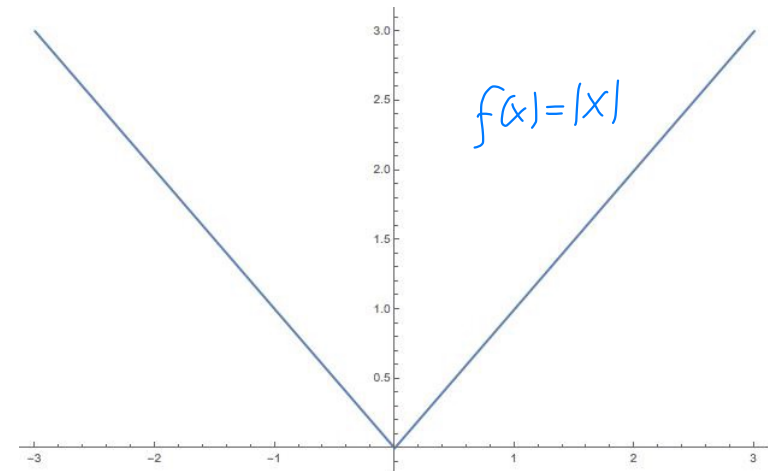
Ex. $f(x) = |x|$ est continue en $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Mais la dérivée $f'(0)$ n'existe pas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \text{ n'existe pas.}$$



Déf La dérivée à droite:

$$f_d'(x_0) \stackrel{\text{dér}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

La dérivée à gauche:

$$f_g'(x_0) \stackrel{\text{dér}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists f_d'(x_0), \exists f_g'(x_0) \text{ et } f_d'(x_0) = f_g'(x_0).$$

$$f(x) = |x| \Rightarrow f_d'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f_g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\Rightarrow f'(0) \text{ n'existe pas.}$$

Remarque. On peut introduire la dérivée infinie

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$$

(f n'est pas dérivable en $x = x_0$)

Dans ce cas le graphique de f admet une tangente verticale en x_0 .

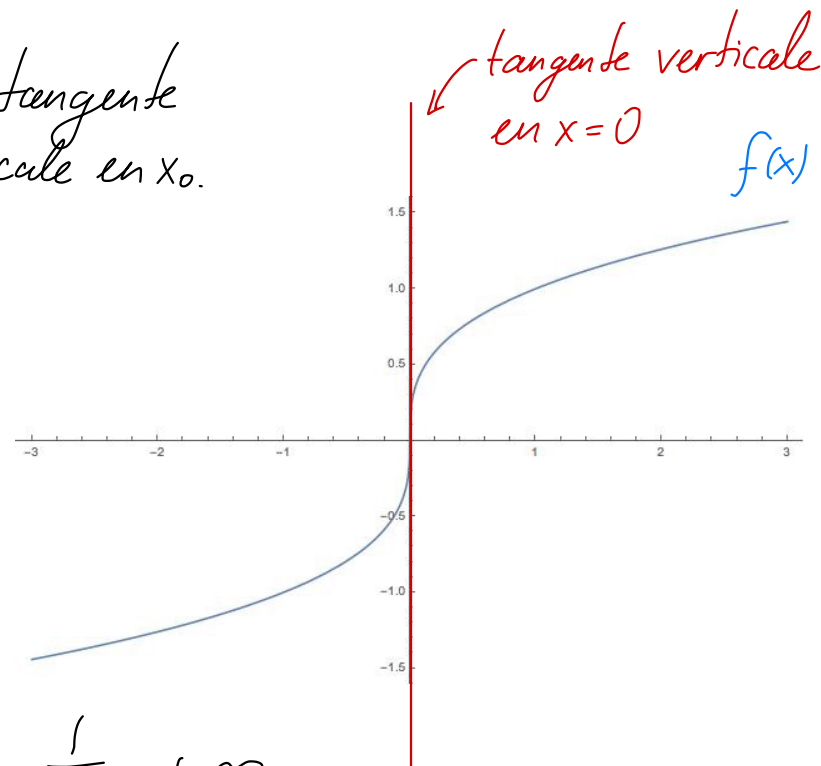
Ex

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|x|}, & x < 0 \end{cases}$$

$$f_d'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

$$f_g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt[3]{|x|} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt[3]{|x|}}{x} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0^+ \\ y = -x}} \frac{-\sqrt[3]{y}}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

$$\Rightarrow f'(0) = +\infty$$



Opérations algébriques sur les dérivées. Soient $f, g : E \rightarrow F$ deux fonctions ⁻¹⁵¹⁻
dérivables en $x = x_0$

Alors: (1) $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$ si $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 .

Dém: (1) et (2) exercices (voir [DZ])

On va démontrer $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ ($g(x_0) \neq 0$); Alors (2) $\Rightarrow$ (3)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x) \cdot g(x_0) \cdot (x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}}_{\downarrow -g'(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{\downarrow \frac{1}{g^2(x_0)}} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned}$$

$\nearrow$ g est continue en x_0



Ex 1. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ $(x^n)' = n x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dém: par récurrence:

Initialisation: $n=1 \Rightarrow (x)' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1 \Rightarrow (x') = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Hérédité Supposons que $(x^n)' = n x^{n-1}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$

Démontrons $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$

$$\begin{aligned} (x^{n+1})' &= (x^n \cdot x)' \stackrel{(2)}{=} (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' = n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = \\ &= n x^n + x^n = (n+1)x^n. \end{aligned}$$

Alors, par récurrence, la proposition $(x^n)' = n x^{n-1}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ □

Ex 2. $f(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow$ par la propriété (3) on a

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \forall x \in D(\operatorname{tg} x)$$

$\Rightarrow$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

sur son domaine de définition

Alors $\exists (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = ??$$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & \text{si } f(x) \neq f(x_0) \\ 0 = g'(f(x_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0, & \text{si } f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$



$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Ex. 3 $g(x) = \left(\frac{\sin^2 x + \cos^4 x}{1 + \sin^2 x + \cos^4 x} \right)$ Trouver $g'(x)$. Soit $f(x) = \sin^2 x + \cos^4 x$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{f(x)}{1+f(x)} = \frac{1+f(x)-1}{1+f(x)} = 1 - \frac{1}{1+f(x)}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \left(1 - \frac{1}{1+f(x)} \right)' = - \left(\frac{1}{1+f(x)} \right)' = - \frac{-f'(x)}{(1+f(x))^2} = + \frac{f'(x)}{(1+f(x))^2}$$

$$(\sin^k x)' = k (\sin x)^{k-1} \cdot \cos x ; \quad (\cos^k x)' = k (\cos x)^{k-1} \cdot (-\sin x).$$

$$\Rightarrow f'(x) = \overbrace{2 \sin x \cos x}^{= \sin 2x} + 4 \cos^3 x (-\sin x) = \sin 2x - 2 \sin 2x \cdot \cos^2 x =$$

$$= \sin 2x (1 - 2 \cos^2 x) = -\sin 2x \cos 2x = - \frac{\sin 4x}{2}$$

$\underbrace{1 - 2 \cos^2 x}_{= \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x}$

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{(1+f(x))^2} = - \frac{\sin 4x}{2(1+\sin^2 x + \cos^4 x)^2}$$